Analiza II.1*

Kolokwium, 3 lutego 2023

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce.
W każdym zadaniu należy wyraźnie powoływać się na wykorzystywane twierdzenia (dowodzone na wykładzie lub ćwiczeniach).
Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.
Czas pisania: 180 min.

Zadanie 1: Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Uzasadnić, że

$$\int_{[0,1]} \sqrt[m]{1-x^n}\, \mathrm{d}l_1(x) = \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^m}\, \mathrm{d}l_1(x).$$

Zadanie 2: Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną na prostej $\mathbb{R}$, $U := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ a > 0\}$. Odwzorowanie $L : U \to L^1(\mathbb{R})$ dane jest wzorem

$$L(a,b)(x) = f(ax+b).$$

a) Wykazać, że L jest ciągłe.

b) Jeżeli f jest klasy C^1 o zwartym nośniku to L jest różniczkowalne. Obliczyć $L'(1,0)$.

Zadanie 3: Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_V e^{x^2+y^2+z^2} \left(n \sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)\right)^{-1} \mathrm{d}l_3,$$

gdzie $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \sqrt[3]{z}\}$. Postępowanie uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenia.

Zadanie 4: Niech

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x,y,z > 0, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, \quad x+y+z = 6\}.$$

a) Wykazać, że M jest gładką rozmaitością wymiaru 1.

b) Wykazac, że funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y,z) = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z}$$

osiąga wartość maksymalną na M.

c) Obliczyć tę wartość.

Zadanie 5: Niech f będzie funkcją na $\mathbb{R}^2$ klasy C^2 o zwartym nośniku. Wykazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log(x^2+y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}l_2 = 4\pi f(0).$$

Wsk. Zastosować twierdzenie Fubiniego. We współrzędnych biegunowych (r,φ) *mamy:* $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x f_x + y f_y}{r}$